2.2. Composición de funciones

Dadas dos funciones, f y g, se denomina **función compuesta de f y g** a la que se obtiene aplicando g a la imagen por f de x, $f(x)$, y se escribe $g \circ f$:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

El dominio de $g \circ f$ es $\text{Dom}\,(g \circ f) = [\text{Dom}\, f] \cap [f^{-1}(\text{Dom}\, g)]$, donde $f^{-1}(\text{Dom}\, g)$ es el subconjunto de todos los números reales cuya imagen por f pertenece al dominio de g.

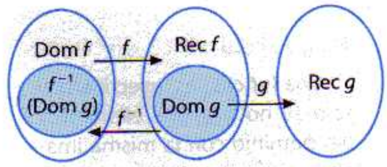

Figura 7.9.

Ejemplos

1. *Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \ln x$, hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.*

$\text{Dom}\, f = [1, +\infty)$ y $\text{Dom}\, g = (0, +\infty)$

La función f compuesta con g o composición de f y g es:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \ln \sqrt{x-1}$$

Como se observa, debe ser $f(x) > 0$ para que exista su imagen por g.

Como $\sqrt{x-1} \geq 0$, debemos imponer que $\sqrt{x-1} \neq 0$, por lo que:

$$\text{Dom}\,(g \circ f) = (1, +\infty)$$

La función g compuesta con f o composición de g y f es:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\ln x) = \sqrt{\ln x - 1}$$

Como se puede observar, debe ser $g(x) \geq 1$ para que exista su imagen por f: $\ln x \geq 1$, esto es, $x \geq e$. Por tanto, $\text{Dom}\,(f \circ g) = [e, +\infty)$.

2. *Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ y $g(x) = \sqrt{2x-1}$, hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.*

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ y $\text{Dom}\, g = [1/2, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2x-1}) = \frac{2x-1}{2x-2}$$

Como se observa, debe ser $g(x) \neq 1$, por lo que $x \neq 1$.

Es decir, $\text{Dom}\,(f \circ g) = [1/2, 1) \cup (1, +\infty)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) = \sqrt{2\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right) - 1} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

Debe ser $f(x) \geq 1/2$, puesto que el dominio de g es $[1/2, +\infty)$. Como $f > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ resolvemos la inecuación en dicho conjunto:

$\dfrac{x^2}{x^2-1} \geq 1/2 \Rightarrow x^2 \geq -1$, lo cual siempre es cierto en el dominio considerado. Por tanto, $\text{Dom}\,(g \circ f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Observa

La composición de funciones no es conmutativa.

Actividades

2 Si $f(x) = x^4 - 2x^2$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x}}$, calcula las funciones compuestas de $f \circ g$ y $g \circ f$, así como sus respectivos dominios.

Solución: $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$; $\text{Dom}\,(g \circ f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

$(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$; $\text{Dom}\,(f \circ g) = (0, +\infty)$

Función identidad

La composición de funciones posee elemento neutro, que es la **función identidad** $I(x) = x$, que verifica:

$$f \circ I = I \circ f = f$$